C'est quoi le milieu de trois points? Du point de Fermat aux problèmes de transport, de la géométrie à l'informatique

Camelia Goga

Institut de mathématiques de Bourgogne (IMB), Université de Bourgogne
et IREM-Dijon

"Semaine des mathématiques"
16-20 mars 2015 Dijon

Courte présentation

1. Le problème de Fermat pour trois points dans le plan : solutions géométriques
2. Plus de trois points dans le plan ou le problème de transport de Weber : s'il existe, comment trouver un tel point ? inventer une méthode numérique rapide qui marche quel que soit le nombre de points : un algorithme informatique
3. Diverses applications du "point" de Fermat dans d'autres domaines que le transport :
   - la statistique
   - la recherche médicale (néuro-science)

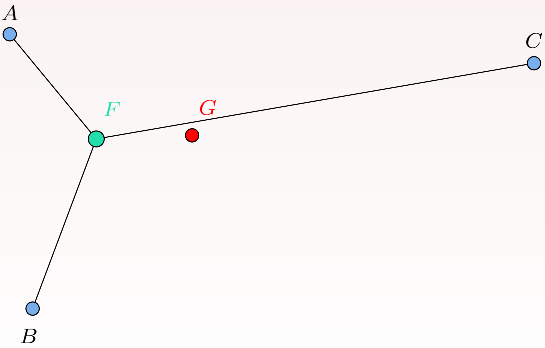
Court voyage dans le temps : Pierre de Fermat

- **Pierre de Fermat** (1ère décennie du XVIIè siècle-1665), célèbre mathématicien français
- Fermat lance en 1636 le défi suivant : "Etant donnés trois points en trouver un quatrième tel que la somme de ses distances aux trois points donnés soit minimale"

F : le point de Fermat

G : centre de gravité

Il existe F tel que FA+FB+FC soit le plus petit possible ?
Si oui, quelle est sa position et quelle est la valeur de FA+FB+FC ?



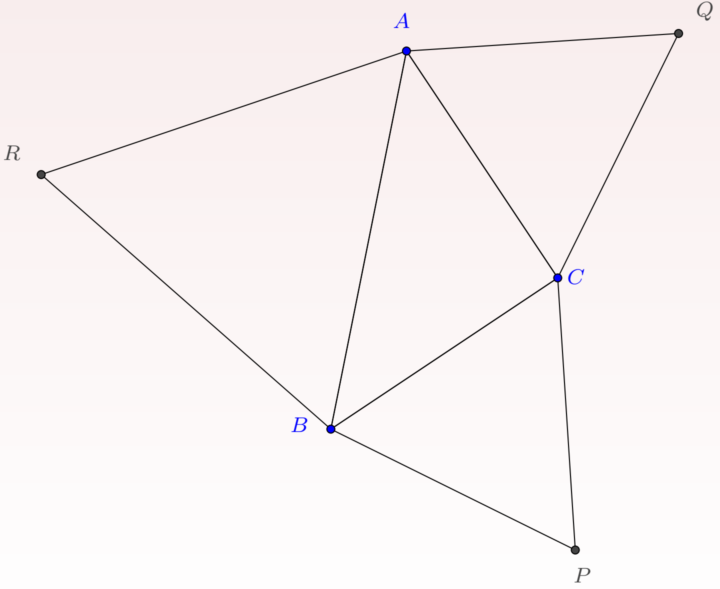
Solutions au problème de Fermat

- **Evangelista Torricelli**, physicien et mathématicien italien du XVIIe siècle, connu notamment pour avoir inventé le baromètre, fourni une solution géométrique vers 1640 :

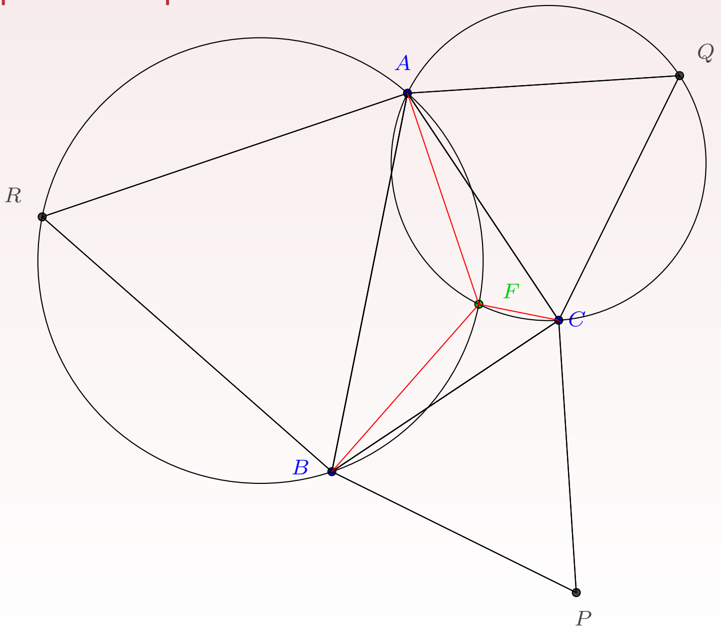
  en utilisant des propriétés d'ellipses, le point cherché est l'intersection des trois cercles circonscrits aux triangles équilatéraux construits sur les cotés $[AB], [AC]$ et $[BC]$.

- Plusieurs mathématiciens de l'époque (Cavalieri, Viviani, Simpson) se sont "amusés" à trouver des nouvelles démonstrations, toutes basées sur des arguments géométriques

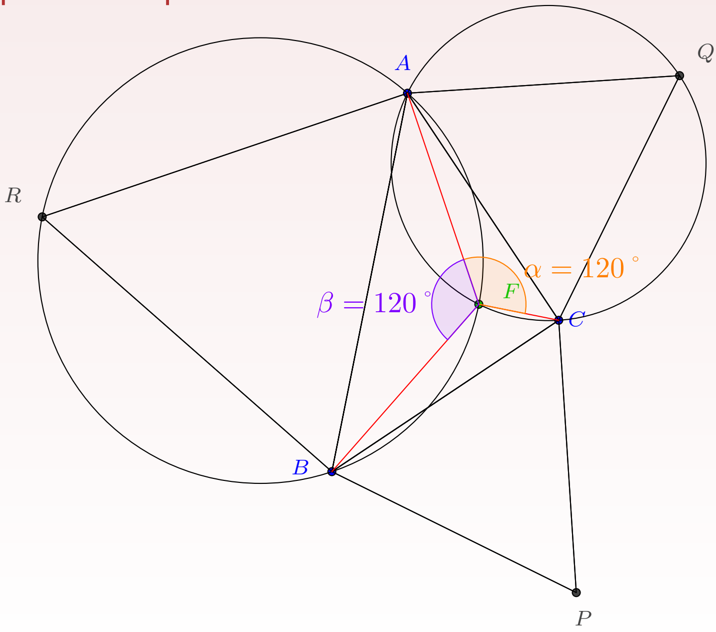
Propriétés du point de Fermat



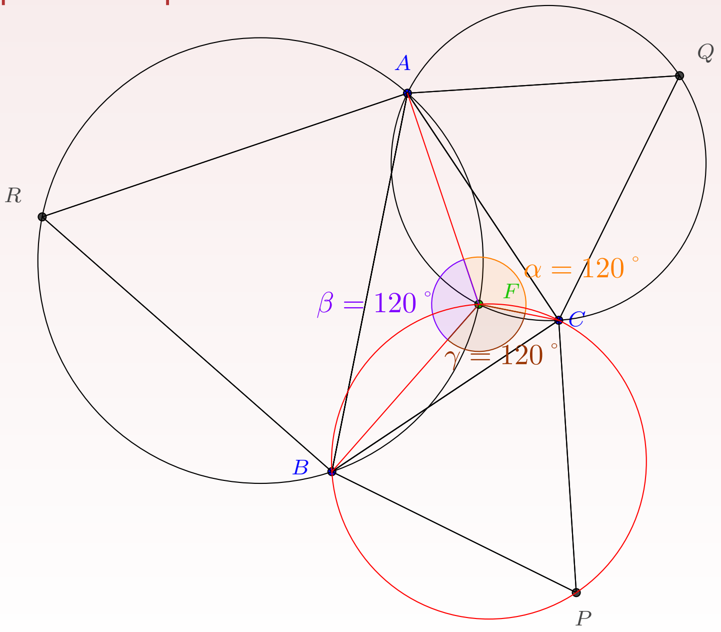
Propriétés du point de Fermat



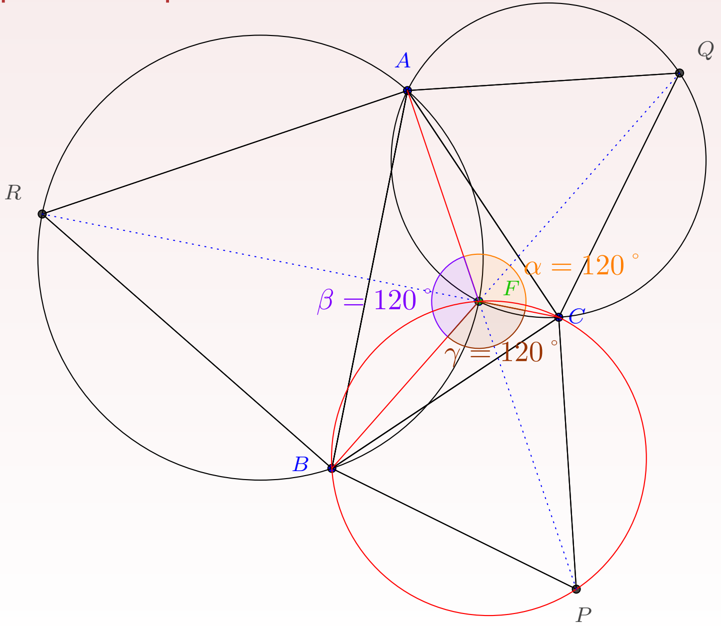
Propriétés du point de Fermat



Propriétés du point de Fermat



Propriétés du point de Fermat

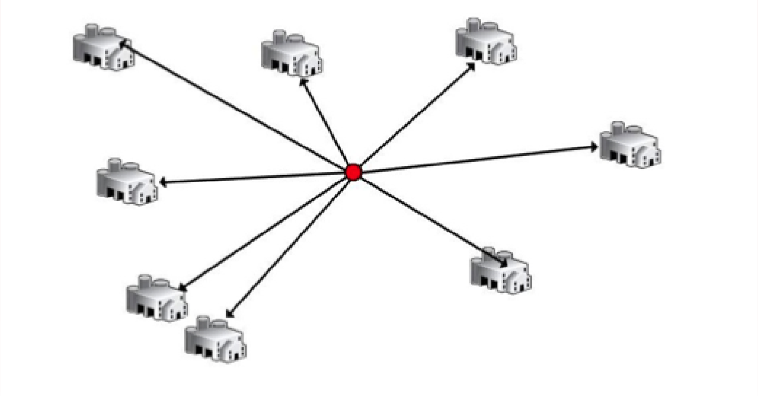


En résumé :

1. les droites FA, FB et FC forment entre elles des angles de 120°;
2. Si ABC est bordé extérieurement par trois triangles équilatéraux ABR, ACQ et BCP les segments sont concourants en F;
3. les cercles de Torricelli, circonscrits aux triangles ABR, ACQ, BCP sont concourants en F.

Problème de transport de Weber (1909)

300 ans plus tard, on rencontre le problème de Fermat dans un problème de localisation formulé par **Weber** (1909) :



Quel est l'emplacement optimal d'un entrepôt tel que la somme des coûts de transports à plusieurs clients soit la plus petite possible ?

Nouveau challenge : comment trouver le point de minimum quand on a plus de trois points ?

Les solutions proposées auparavant (géométriques) ne permettent pas de trouver le "point" de Fermat pour plus de trois clients ! !

Plusieurs questions se posent :

- Un tel point existe-t-il ? (Kemperman, 1987)
- Si oui, est-il unique ? (Kemperman, 1987)
- Comment trouver un tel point ? La difficulté vient du fait que les coordonnées du point de Fermat ne peuvent pas être données de **façon explicite**.

La nécessité de trouver une **méthode numérique itérative (répétitive) ou un algorithme** qui permet de s'approcher du point de Fermat.

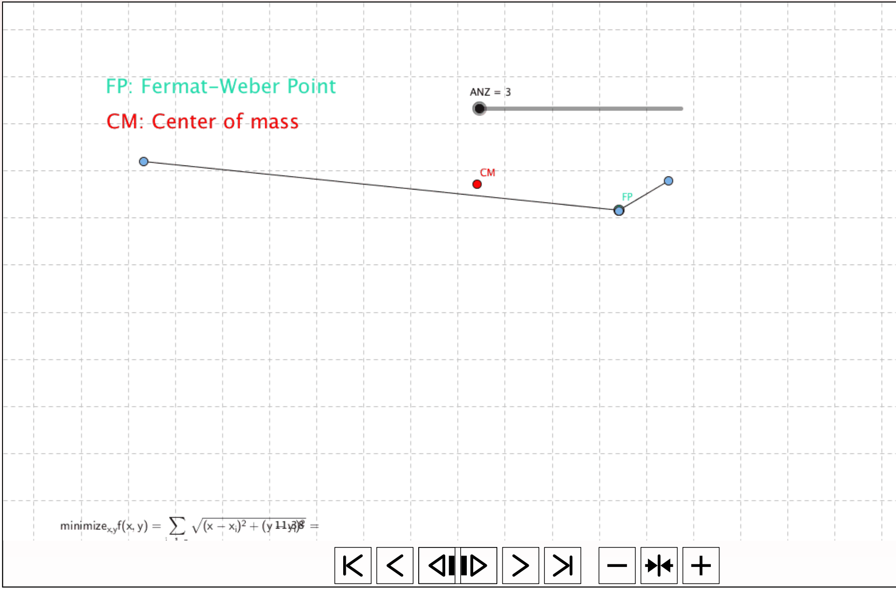
Qu'est-ce qu'un algorithme (informatique) ?

- Le mot « algorithme » vient du nom du grand mathématicien persan **Al Khwarizmi** (vers l'an 820), qui introduisit en Occident la numération décimale (rapportée d'Inde) et enseigna les règles élémentaires des calculs s'y rapportant ;
- Un algorithme est une **méthode**, une **façon systématique** pour trier des objets, chercher des mots dans un dictionnaire, poser une division, extraire la racine carrée ...
- Un **algorithme informatique** est une méthode conçue pour être implémentée à l'aide d'un ordinateur. L'essentiel est de trouver les éléments clés du processus de calcul et les suites d'opérations logiques les plus efficaces (en temps de calcul et de mémoire).

L'algorithme de Weiszfeld (1937) pour trouver le point de Fermat

```
def median_approx(self,P, points):
 """
 Donne une nouvelle approximation du point de
  Fermat-Weber des points en utilisant une iteration de
  l'algorithme de Weiszfeld a l'ancienne approximation P
  """
        W = x = y = 0.0
        for Q in points:
            d = self.distance(P, Q)
            if d != 0:
                w = 1.0 / d
                W += w
                x += Q[0] * w
                y += Q[1] * w
        return x / W, y / W
```

Implementation avec Python et GeoGebra

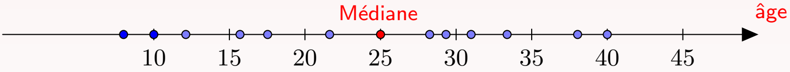


Généralisation du point de Fermat en statistique

Le point de Fermat est lié à la notion de **médiane** qui est un indicateur utilisé en statistique.

Exemple : nous considérons une étude concernant l'âge des individus d'une population.

La médiane est la valeur de l'âge telle que 50% d'individus ont un âge inférieur et 50% d'individus ont un âge supérieur.



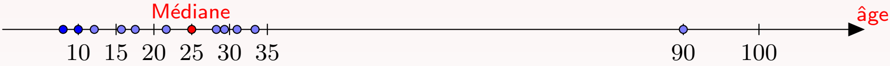
La moyenne des âges est égale à **23.12** ans et la médiane à **25** ans.

Définition équivalente : la médiane est la valeur qui minimise la somme des distances aux autres valeurs d'âge dans la population.

Pourquoi étudier la médiane ?

La médiane est un indicateur **central** (se trouve au "milieu") de la distribution de la quantité d'intérêt (l'âge dans notre exemple).

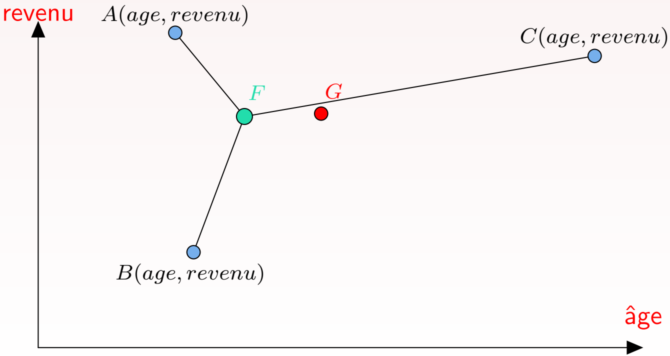
La médiane possède une propriété remarquable : elle est **robuste** dans le sense que sa valeur n'est pas sensible aux valeurs extrêmes (très grandes ou très faibles). Ce n'est pas le cas de la **moyenne**.



La moyenne est égale à **27.67** ans et la médiane est égale toujours à **25**.

Et la médiane pour des points dans le plan ?

- Si on considère maintenant que pour chaque individu, on mesure le revenu en plus de l'âge, comment trouver la médiane (statistique) dans ce cas ?
- La réponse n'est pas simple car on ne peut pas ordonner les points dans le plan comme on l'avait fait sur la droite ! !
- On utilise la propriété de la médiane de minimiser la somme des distances aux points de départ !

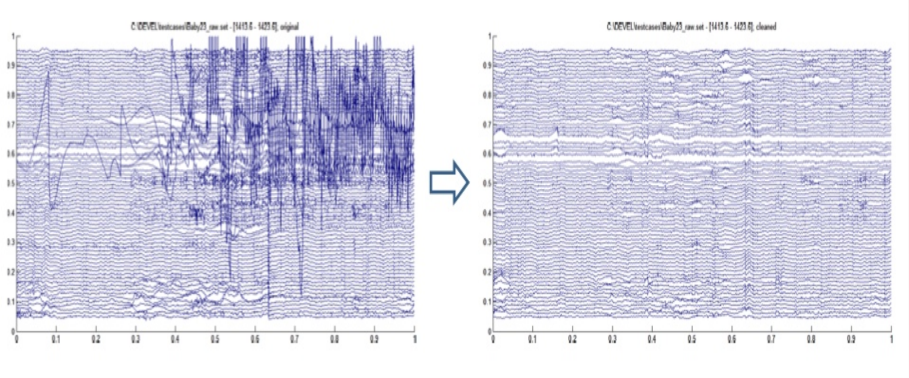


Propriété remarquable de robustesse

- Si on bouge le point A (ou B ou C) sur la direction FA, alors le point F ne bouge pas
- En pratique, on peut avoir des milliers, voir des millions des points et chaque point est caractérisé par des dizaines de mesures.

Utilisation dans d'autres domaines : application en recherche médicale

Neuro-science : réduction des artefacts (signaux parasites, bruits) sur électroencéphalogrammes (EEG)



Conclusion

- Un problème vieux de presque 400 ans mais qui est toujours d'actualité
- Un thème de recherche actuel autour de cette question ces dernières années (à l'Univ. de Bourgogne aussi)
- Nouvelles questions liées à la taille des données. Comment calculer la médiane pour des gros jeux des données : des milliers, voire des millions d'individus caractérisés chacun par des milliers de mesures ?
  - sondage dans la base de données
  - algorithmes de mise à jour automatique